ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
06 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 111
Α2: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 104
Α3: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128
Α4: α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$g: R \to R$ με $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}$
$h: (0, +\infty) \to R \; με \; h(x) = lnx$

Β1. Πρέπει : $x \in A_h$ και $h(x) \in A_g \Leftrightarrow x > 0$ και $\ln x \in R \Leftrightarrow x > 0$ και $x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $A_f = (0, +\infty)$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\cdot\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x}$$

Β2. i) $f'(x) = (\frac{4}{x} - x)' = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0, \quad για \; κάθε \; x > 0$

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f \; γν.φθιν}{\Leftrightarrow} \pi > e$ ισχύει

Β3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x} - x\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$

Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2} - 1\right) = 0 - 1 = -1 = \lambda \in$

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \underbrace{\lambda}_{-1} \cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{x} - x + x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta \in$

Η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f. στο $+\infty$.

Β4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x}=0$$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow-\frac{1}{\left|f(x)\right|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\le\frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\left|f(x)\right|}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

Από κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f\left(x\right)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3\cdot x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+a, & x\ge 1\end{cases}\qquad a\in\Re$$

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\mathrm{d}x=1$$

Γ1.

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\cdot\left(\frac{1}{x}+a\right)\mathrm{d}x=1\,\alpha\Leftrightarrow$$

$$\int_2^3\left(1+a\cdot x\right)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow\left[x+\frac{a\cdot x}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow$$

$$\left(3+\frac{a\cdot 3^2}{2}\right)-\left(2+\frac{a\cdot 2^2}{2}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\cancel{3}+\frac{9\cdot a}{2}-\cancel{2}-2\cdot a=\cancel{1}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}9\cdot a-4\cdot a=0\Leftrightarrow$$

$$5\cdot a=0\Leftrightarrow a=0$$

Γ2. **i)**

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3\cdot x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3\cdot x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3\cdot x+2}{x-1}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\Delta\mathrm{LH}}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{(x^2-3x+2)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{2\cdot x-3}{1}=2-3=-1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\Delta\mathrm{LH}}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}{(x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1}=-1$$

Άρα $f'(1)=-1$, δηλαδή ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο με $x_0=1$.

Γ3. Αν $x<1: f'(x)=2\cdot x-3<0$, για κάθε $x<1$

Άρα η f στο $(-\infty,1]$

Αν $x>1: f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>1$

Άρα η f στο $[1,+\infty)$

Η f παρ/μη στο $x=1$ άρα και συνεχής στο $x=1$

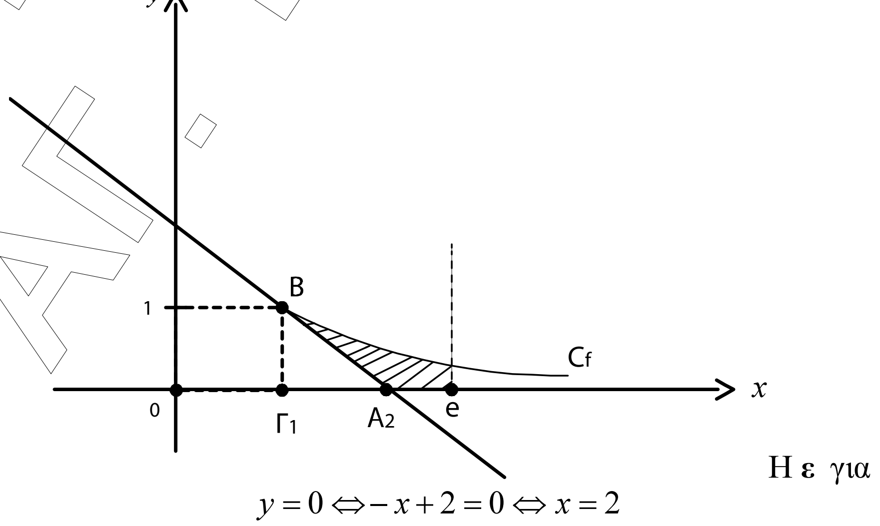
οπότε η f στο άρα είναι και 1-1

$$f\left((-\infty,+\infty)\right)\overset{f}{=}\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

γιατί: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-3\cdot x+3\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Γ4.



Η ε για

$$y=0\Leftrightarrow -x+2=0\Leftrightarrow x=2$$

Το σημείο τομής της ε με τον $x'x$ είναι $\mathrm{A}(2,0)$

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$, για κάθε $x>1$

Άρα η f κυρτή στο $[1,+\infty)$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο εκτός από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x)\geq -x+2$

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-E_{\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}}=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{2}=\left[\ln x\right]_1^e-\frac{1\cdot 1}{2}=\ln e-\ln 1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f:(0,2)\to \mathbb{R}$ με $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa\ ,\ \kappa\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2\cdot x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$$

Δ1. Θέτω : $\frac{f(x)-2\cdot x}{x-1}=g(x) \iff f(x)-2\cdot x=g(x)\cdot(x-1)$

$\iff f(x)=g(x)\cdot(x-1)+2\cdot x$

με $\lim_{x\to 1}g(x)=\ell$

Η f συνεχής στο $x=1$ ως πράξεις συνεχών άρα

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)\cdot(x-1)+2\cdot x\right]=\ell\cdot 0+2=2$$

Άρα $f(1)=2 \iff \ln(2-1)-\frac{1}{1}+\kappa=2 \iff$

$\underbrace{\ln 1}_{0}-1+\kappa=2 \iff \kappa=3$.

Δ2. $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\ \ ,\ \ x\in(0,2)$

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)'+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\overset{x^2}{1}}{x-2}+\frac{\overset{x-2}{1}}{x^2}=$$

$$=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

$f'(x)=0 \iff x^2+x-2=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}<\begin{matrix}\frac{2}{2}=1\\ -\frac{4}{2}=-2\notin(0,2)\end{matrix}$$

$$f'(x) > 0 \overset{x-2<0}{\underset{x^2>0}{\iff}} x^2 + x - 2 < 0 \iff 0 < x < 1$$

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\Delta_1 = f\big((0,1]\big) \overset{f \nearrow}{=} \Big(\lim_{x \to 0^+} f(x), f(1)\Big] = (-\infty, 2]$$

γιατί : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = \ln 2 - (+\infty) + 3 = -\infty$

$f(1) = 2$

Το $0 \in \Delta_1$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_1 < 1$ και είναι μοναδική γιατί $f \nearrow$.

$$\Delta_2 = f\big([1,2)\big) \overset{f \searrow}{=} \Big(\lim_{x \to 2^-} f(x), f(1)\Big] = (-\infty, 2]$$

γιατί : $\lim\limits_{x \to 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = (-\infty) - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$

γιατί: $\lim\limits_{x \to 2^-} \ln(2-x) \underset{u \to 0^+}{\overset{u = 2-x}{=}} \lim\limits_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$

Το $0 \in \Delta_2$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_2 > 1$ και είναι μοναδική γιατί $f \searrow$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3} > 0 \iff f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \overset{f \nearrow \text{ στο } (0,1]}{\iff} \frac{1}{3} > x_1.$$

Δ3. Η f συνεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(x_1, \frac{1}{3})$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, \frac{1}{3})$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3}) - \overset{0}{\cancel{f(x_1)}}}{\frac{1}{3} - \frac{x_1}{1}} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1-3\cdot x_1}{3}} = \frac{3\cdot f(\frac{1}{3})}{1-3\cdot x_1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Άρα η $f'(x) \searrow$ στο $(0,1)$ οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. F, G αρχικές της f στο $(0,2)$

$F(x_1) = G(x_2) = 0$

i) F αρχική της f άρα $F'(x) = f(x)$

G αρχική της f άρα $G'(x) = f(x)$

Άρα $F'(x) = G'(x)$ οπότε ισχύει $F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R}$ (1)

Η (1) για $x = x_1$: $\overset{0}{\cancel{F(x_1)}} = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Η (1) για $x = x_2$: $F(x_2) = \underset{0}{\cancel{G(x_2)}} + c \overset{c=-G(x_1)}{\Leftrightarrow} F(x_2) = -G(x_1)$

$\Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) Έστω $k(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2 \cdot x$

• Η $k(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

$$k(x_1) = x_1 \cdot \cancel{F(x_1)} + x_2 \cdot G(x_1) - x_1 - x_2 + 2 \cdot x_1 =$$

$$= -x_2 \cdot F(x_2) + x_1 - x_2$$

$$k(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot \cancel{G(x_2)} - x_1 - x_2 + 2 \cdot x_2 =$$

$$= x_1 \cdot F(x_2) + x_2 - x_1$$

$F'(x) = f(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

γιατί : Αν $x_1 < x \leq 1 \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f(x_1) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0$

Αν $1 < x < x_2 \overset{f \searrow}{\Longrightarrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα η $F(x) \nearrow$ στο $[x_1, x_2]$ οπότε

για $x_1 < x_2 \overset{F \nearrow}{\Longrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

Άρα $k(x_1) < 0$ γιατί $-x_2 \cdot F(x_2) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

και $k(x_2) > 0$ γιατί $x_1 \cdot F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

Άρα $k(x_1) \cdot k(x_2) < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $k(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (x_1, x_2).

$k'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 = x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2 > 0$

Άρα η $k(x) \nearrow$ οπότε η ρίζα είναι μοναδική.